Figuras, Ladrilhos, Dominós e Mosaicos
Linguagens Bidimensionais Reconhecíveis

Fabiano Mitsuo Sato
Orientadora: Professora Nami Kobayashi

Problemas relacionados a reconhecimento de padrões e processamento de imagens foram uma das primeiras motivações para estender os conceitos e as técnicas da Teoria de Linguagens Formais para duas dimensões.

Figuras

Uma figura ou palavra bidimensional é uma matriz de símbolos de um alfabeto finito.

$\Sigma = \{0, 1\}$

$$p = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\end{array} \qquad \widehat{p} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \hline \# & 1 & 0 & 0 & 0 & \# \\ \hline \# & 0 & 1 & 0 & 0 & \# \\ \hline \# & 0 & 0 & 1 & 0 & \# \\ \hline \# & 0 & 0 & 0 & 1 & \# \\ \hline \# & \# & \# & \# & \# & \# \\ \hline\end{array}$$

$l_1(p)$ - número de linhas da figura p;
$l_2(p)$ - número de counas da figura p;
$(l_1(p), l_2(p))$ - tamanho de p;
$p(i, j)$ - símbolo de p na linha i e coluna j;
$\widehat{p}$ - figura p com uma borda de #s.

Uma linguagem bidimensional é um conjunto de figuras. O conjunto de todas as figuras sobre um alfabeto Σ é denotado por Σ^{**}.

A linguagem L_q sobre $\Sigma = \{0, 1\}$ de todas as figuras que são quadrados, com 1 na diagonal principal e 0 nas outras posições, pode ser descrita por

$$L_q = \{p \in \Sigma^{**} \mid l_1(p) = l_2(p) > 0,\ p(i, i) = 1 \text{ e } p(i, j) = 0 \text{ para todo } i \neq j \text{ tal que } 1 \leq i, j \leq l_1(p)\}.$$

Projeções

Uma projeção π de um alfabeto finito Γ em um alfabeto finito Σ é uma função $\pi : \Gamma \to \Sigma$.

Projeções são estendidas naturalmente para figuras e linguagens.

Expressões regulares ($\ominus, \obar, *\ominus, *\obar, \cup, \cap$)

A linguagem L_l sobre $\Gamma = \{0, 1, 2\}$ de todas as figuras formadas por uma única linha, contendo um número qualquer de 2s, seguido por exatamente um 1, seguido por um número qualquer de 0s pode ser definida por

$$L_l = L(2^{*\obar} \obar 1 \obar 0^{*\obar}).$$

Analogamente, a linguagem L_c sobre $\Gamma = \{0, 1, 2\}$ de todas as figuras formadas por uma única coluna, contendo um número qualquer de 0s, seguido por exatamente um 1, seguido por um número qualquer de 2s pode ser definida por

$$L_c = L(0^{*\ominus} \ominus 1 \ominus 2^{*\ominus}).$$

Usando L_l e L_c e considerando uma projeção $\pi : \Gamma \to \{0, 1\}$ tal que $\pi(0) = \pi(2) = 0$ e $\pi(1) = 1$, a linguagem L_q pode ser definida por

$$L_q = \pi({L_l}^{*\ominus} \cap {L_c}^{*\obar}).$$

Sistema de ladrilhos (*Tiling system*)

Proposto por Giammarresi e Restivo em 1991, é fundamentado no conceito de linguagem local e projeção.

Um sistema de ladrilhos $\mathcal{T}$ é definido por

$$\mathcal{T} = (\Sigma, \Gamma, \Theta, \pi),$$

onde Σ e Γ são alfabetos finitos, Θ é um conjunto finito de ladrilhos (figuras de tamanho $(2, 2)$) sobre $\Gamma \cup \{\#\}$ e $\pi : \Gamma \to \Sigma$ é uma projeção.

A linguagem local bidimensional definida por Θ é

$$L(\Theta) = \{p \in \Gamma^{**} \mid \text{toda subfigura } (2, 2) \text{ de } \widehat{p} \text{ pertence a } \Theta\}.$$

A linguagem definida por $\mathcal{T}$ é $L(\mathcal{T}) = \pi(L(\Theta))$.

Um sistema de ladrilhos $\mathcal{T} = (\Sigma, \Gamma, \Theta, \pi)$ tal que $L(\mathcal{T}) = L_q$ é dado por

$\Gamma = \Sigma = \{0, 1\}$;

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|c|}\hline \# & \# \\ \hline \# & 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & \# \\ \hline 0 & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & \# \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & \# \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & 1 \\ \hline \# & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & 0 \\ \hline \# & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & \# \\ \hline 0 & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & \# \\ \hline 1 & \# \\ \hline\end{array}, \\ \\ \begin{array}{|c|c|}\hline \# & 0 \\ \hline \# & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \# \\ \hline \# & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline \# & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline \# & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline\end{array} \end{array} \right\};$$

e π é a identidade.

Sistema de dominós (*Domino system*)

Proposto por Latteux e Simplot em 1994, é semelhante ao sistema de ladrilhos, substituindo os ladrilhos por dominós (figuras de tamanho $(2, 1)$ ou $(1, 2)$).

Um sistema de dominós $\mathcal{D}$ é definido por

$$\mathcal{D} = (\Sigma, \Gamma, \Delta, \pi),$$

onde Δ é um conjunto finito de dominós sobre $\Gamma \cup \{\#\}$.

A linguagem definida por $\mathcal{D}$ é $L(\mathcal{D}) = \pi(L(\Delta))$, onde $L(\Delta)$ é definida de forma análoga a $L(\Theta)$.

Um sistema de dominós $\mathcal{D} = (\Sigma, \Gamma, \Delta, \pi)$ tal que $L(\mathcal{D}) = L_q$ é dado por

$\Gamma = \{0, 1, 2\}$ e $\Sigma = \{0, 1\}$;

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{|c|}\hline \# \\ \hline \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \# \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline \# \\ \hline 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \# \\ \hline\end{array}, \\ \\ \begin{array}{|c|c|}\hline \# & \# \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline \# & 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & \# \\ \hline\end{array}, \\ \\ \begin{array}{|c|c|}\hline \# & 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \# \\ \hline\end{array} \end{array} \right\};$$

e $\pi(0) = \pi(2) = 0,\ \pi(1) = 1$.

Mosaico de autômatos (*On-line tessellation automaton*)

Introduzido por Inoue e Nakamura em 1977, é um tipo de autômato celular que consiste de uma fita bidimensional e uma matriz "infinita" de autômatos finitos idênticos.

Supondo que a fita contenha uma figura com borda, o autômato na posição (i, j) da matriz lerá somente o símbolo na posição (i, j) da figura. Durante uma execução dessa máquina, cada autômato muda de estado uma única vez e essa transição, que depende do símbolo que ele está lendo e dos estados dos autômatos acima e à esquerda na matriz, só ocorrerá após as transições desses autômatos.

Relacionando as abordagens

Projeções de expressões regulares, sistemas de ladrilhos, sistemas de dominós e mosaicos de autômatos definem a mesma família de linguagens bidimensionais. Essas linguagens são chamadas de linguagens bidimensionais reconhecíveis.