Algoritmos Probabilísticos

Gilson Evandro Fortunato Dias

Orientador: José Coelho de Pina

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Ciência da Computação

Algoritmos Probabilísticos

- Fazem escolhas aleatórias durante a sua execução.

Vantagens

- Costumam ser mais eficientes que algoritmos determinísticos.

- E na maior parte dos casos são também mais simples e fáceis de implementar.

Desvantagen

- A resposta pode ter alguma probabilidade de estar certa.
- Ou o algoritmo é eficiente com alguma probabilidade.

Como eles se comportam?

- A análise probabilística ajuda-nos a definir a complexidade e o comportamento destes algoritmos.
- A entrada do problema é escolhida aleatoriamente de acordo com alguma distribuição de probabilidade.

Como eles se comportam?

- A análise probabilística ajuda-nos a definir a complexidade e o comportamento destes algoritmos.
- A entrada do problema é escolhida aleatoriamente de acordo com alguma distribuição de probabilidade.
- Temos como exemplo a análise do Quicksort-Aleatorizado.

st-Caminhos em Grafos

- Seja G um grafo com $n = |V|$ e $m = |E|$.

- Para s e t em $V(G)$, existe um caminho de s a t?

st-Caminhos em Grafos

- Seja G um grafo com $n = |V|$ e $m = |E|$.
- Para s e t em $V(G)$, existe um caminho de s a t?
- Uma busca em largura ou em profundidade consomem $\Omega(n)$ para achar um st-caminho.

Cadeia de Markov

- Processo Estocástico: $Y = \{X(t) : t \in T\}$.
- Se T é enumerável, então Y é um processo de tempo discreto.
- Um processo estocástico de tempo discreto $X_0, X_1, X_2, \ldots$ é uma cadeia de Markov se Pr($X_t = a_t | X_{t-1} = a_{t-1}, ..., X_0 = a_0$) = Pr ($X_t = a_t | X_{t-1} = a_{t-1}$).

Passeio Aleatório

- Um passeio aleatório é uma cadeia de Markov.

Passeio Aleatório

- Um passeio aleatório é uma cadeia de Markov.

- Se a partícula está no vértice i e tem $d(i)$ arestas que saem de i, então a partícula vai para um vértice vizinho j com probabilidade $\frac{1}{d(i)}$.

O algoritmo

- Começa um passeio aleatório a partir de s.
- Se achar um caminho em até $4n^3$ passos, devolva **sim**.
- Caso contrário, devolva **não**.

Funciona?

- Se não existe caminho, o algoritmo devolve a resposta certa.
- Pode errar a resposta se não achar o caminho em $4n^3$ passos.

Funciona?

- Se não existe caminho, o algoritmo devolve a resposta certa.

- Pode errar a resposta se não achar o caminho em $4n^3$ passos.

- Seja X o número de passos dados pelo passeio. Qual é a probabilidade de $X > 4n^3$?

Cover Time de G

- O cover time de um grafo G é o máximo do tempo esperado que um passeio aleatório começando em v, para todo $v \in V$, leva para atingir todos os vértices de G.

- O cover time é limitado superiormente por $4|V|.|E|$.

- $E[X] < 4nm \leq \frac{4n(n(n-1))}{2} = 2n^3 - 2n^2 < 2n^3$.

Desigualdade de Markov

- Seja Y uma variável aleatória que assume valores positivos.
- Para todo $a > 0$, $\mathrm{Pr}(Y \geq a) \leq \frac{E[Y]}{a}$.

Desigualdade de Markov

- Seja Y uma variável aleatória que assume valores positivos.
- Para todo $a > 0$, $\Pr(Y \geq a) \leq \frac{E[Y]}{a}$.
- Então a $\Pr(X \geq 4n^3) \leq \frac{2n^3}{4n^3} = \frac{1}{2}$.

Conclusões

- O algoritmo devolve a resposta certa com probabilidade $\frac{1}{2}$.
- E precisa de menos espaço: $O(\log n)$ bits.

Disciplinas Relacionadas

- MAC0328 Algoritmos em Grafos
- MAC0338 Análise de Algoritmos
- MAC0323 Estruturas de Dados
- MAE0228 Noções de Probabilidade e Processos Estocásticos

Referências

Sítios do projeto:

- `http://www.ime.usp.br/~coelho/`
- `http://www.linux.ime.usp.br/~gildias/mac499/`