Probabilidade em Grafos

Israel Danilo Lacerra

Orientador: José Coelho de Pina

Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatítica

Departamento de Ciência da Computação

Probabilidade na computação

Probabilidade tem um papel importante em diversos algoritmos:

- Análise probabilística: algoritmos cuja eficiência se baseia em uma . Ex: *QuickSort*
- Algoritmos probabilísticos: algoritmos que fazem escolhas aleatórias em sua execução, os chamados. Ex: evitar colisão no protocolo *Ethernet*

Algoritmos probabilísticos

Por quê adicionar aleatoriedade a um algoritmo e torná-lo ”imprevisível”?

- Simplicidade e eficiência: algoritmos que podem ser mais simples e/ou eficientes.
- Aproximação: muitas vezes oferecem uma solução aproximada para um problema muito difícil.
  Ex: Método de Monte Carlo

Método de Monte Carlo

Consiste em estimar algum valor usando um espaço amostral e uma simulação nesse espaço.

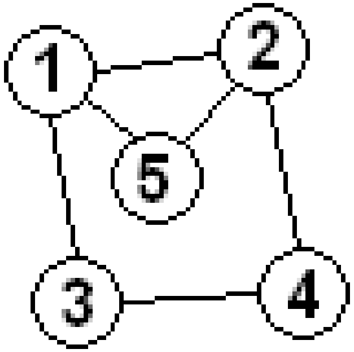
Exemplo - Descobrir o número de vértices verdes em um grafo bicolorido:

- Sorteamos um número M suficientemente grande de vértices e contabilizamos os verdes.
- Usando a proporção de vértices verdes encontrados nos M vértices, estimamos o valor total de vértices verdes.

Conjunto de vértices independentes

Conjunto onde para quaisquer par de vértices não existe uma aresta entre eles.

Exemplo:



Os conjuntos {1, 4}, {4, 5}, {3, 2} e {3, 5} são independentes.

Conjunto de vértices independentes

Dados:

- Um grafo $G = (V, E)$ com m arestas
- Uma ordenação $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_m$ das arestas
- Ω é o espaço amostral com todos os conjuntos de vértices independentes
- G_i o grafo formado pelas primeiras i arestas

Encontrar: o número de conjuntos de vértices independentes. Ou seja, queremos saber o valor $|\Omega(G)|$.

Conjunto de vértices independentes

Podemos expressar $|\Omega(G)|$ da seguinte forma:

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_m)|}{|\Omega(G_{m-1})|} \times \frac{|\Omega(G_m - 1)|}{|\Omega(G_{m-2})|} \times \ldots \times \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \times |\Omega(G_0)|$$

Conjunto de vértices independentes

Podemos expressar $|\Omega(G)|$ da seguinte forma:

$$|\Omega(G)| = \frac{|\Omega(G_m)|}{|\Omega(G_{m-1})|} \times \frac{|\Omega(G_m - 1)|}{|\Omega(G_{m-2})|} \times \ldots \times \frac{|\Omega(G_1)|}{|\Omega(G_0)|} \times |\Omega(G_0)|$$

Mas G_0 é um grafo sem nenhuma aresta e, portanto, qualquer subconjunto de V é um conjunto de vértices independentes. Então $|\Omega(G_0)| = 2^n$. Logo:

$$|\Omega(G)| = 2^n \prod_{i=1}^{m} \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$$

Conjunto de vértices independentes

- Sabemos que $|\Omega(G)| = 2^n \prod_{i=1}^{m} \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$
- Método de Monte Carlo pode estimar $r_i = \frac{|\Omega(G_i)|}{|\Omega(G_{i-1})|}$

Conjunto de vértices independentes

O algoritmo:

```
estimaRi (Gi , Gi-1)
    x = 0
    for  M  vezes
        sorteia um conjunto de vertices independentes do grafo Gi-1
        se esse conjunto pertence ao G_i
           x++
    retorna x/M
```

- O valor de M deve ser suficientemente grande.
- O sorteio do conjunto de vértices independentes merece certa atenção.

Conjunto de vértices independentes

O sorteio...

- não pode ser demorado, pois tiraria a eficiência do algoritmo.
- deve ser um "bom sorteio" no que diz respeito a aleatoriedade.
- é tipicamente feito com auxílio de uma Cadeia de Markov.

Referências

- Michael Mitzenmacher and Eli Upfal. Probability and Computing - Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis. Cambridge University Press, 2005.
- Site do projeto:

  "http://www.linux.ime.usp.br/~israeldl/mac499/"