Teoria dos jogos algorítmica e Otimização combinatória

Aluno: Atol Fortin de Oliveira

Orientadora: Professora Cristina Gomes Fernandes

Trabalho de conclusão de curso

IME - Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

1. Introdução

Nos últimos anos, notou-se que vários problemas de otimização combinatória podem ser olhados sob o ponto de vista de teoria dos jogos, e isso tem trazido resultados interessantes para tais problemas, pois permite que técnicas e observações da área de teoria dos jogos sejam usadas ou sirvam de inspiração. Ao mesmo tempo, o crescimento da internet trouxe consigo uma variedade de problemas novos, muitos deles envolvendo aspectos de teoria dos jogos. Neste projeto mostraremos problemas de otimização combinatória sob o enfoque de teoria dos jogos.

Problemas pertences à área de teoria dos jogos envolvem o estudo de soluções que garantam certas propriedades. Para entender melhor essas propriedades podemos analisar alguns problemas desta área. Um exemplo bem conhecido é o problema dos casamentos estáveis, entre outros que foram estudados neste projeto.

2. Casamentos estáveis

Considere um grupo de homens e um grupo de mulheres que se conhecem, todos solteiros. Podemos imaginar que cada homem tem uma ordem de preferência para as mulheres do grupo, desde a que mais gosta até a mulher que menos gosta, sem empates. O mesmo vale para as mulheres, de maneira análoga. O problema em que estamos interessados é chamado de *problema dos casamentos estáveis*.

Supondo que os dois grupos têm o mesmo tamanho, queremos escolher uma esposa para cada homem, levando em conta as ordens de preferência, de modo que os casamentos sejam *estáveis*.

Denotamos por H o conjunto dos homens e por M o das mulheres, e consideramos então que $|H| = |M| = n$. Todo $m \in M$ tem uma ordem de preferência nos elementos de H: para a e $b \in H$, e $m \in M$, $a \succ_m b$ denota que a mulher m prefere a mais do que prefere b. Assim temos uma ordem de preferência estrita:

$$h_1 \succ_m h_2 \succ_m h_3 \succ_m \cdots \succ_m h_i \succ_m \cdots \succ_m h_n,$$

onde o elemento m tem maior preferência por h_1, e menor preferência por h_n.

Um grupo de casamentos entre H e M é dito *instável* se temos dois homens h_1 e $h_2 \in H$ e duas mulheres m_1 e $m_2 \in M$ onde h_1 está casado com m_1 e h_2 está casado com m_2, mas h_1 prefere m_2 a m_1, e m_2 prefere h_1 a h_2. Nesse caso, dizemos o par (h_1, m_2) é um *par bloqueador*, e temos então um grupo de casamentos instável. Um grupo de casamentos que não possui nenhum par bloqueador é *estável*. O pseudo código abaixo, que deve-se à Gale e Shapley [4], encontra um grupo de casamentos estável em tempo $O(n^2)$.

Algoritmo Proposta Masculina $(H, M, \prec_h, \prec_m)$

- $S \leftarrow H$, $L(m) \leftarrow$ indefinido, para cada $m \in M$
- **para todo** $h \in H$ **faça**
  - $F(h)$ é a primeira mulher em $\prec_h$
- **enquanto** $S \neq \emptyset$ **faça**
  - seja h um homem em S
  - **se** $L(F(h))$ está indefinido
    - **então** $L(F(h)) \leftarrow h$, $S \leftarrow S \setminus \{h\}$
  - **senão**
    - **se** $h \succ_{F(h)} L(F(h))$
      - **então** $S \leftarrow S \cup \{L(F(h))\}$,
      - $L(F(h)) \leftarrow h$,
      - $S \leftarrow S \setminus \{h\}$
  - Atualize $F(h)$ para a próxima mulher em $\prec_h$
- **devolva** L

Além disso, esse algoritmo garante uma outra propriedade importante da área de teoria dos jogos. O algoritmo acima é à prova de estratégia, ou seja, nenhum homem pode se beneficiar ao declarar uma ordem de preferência sobre as mulheres que não seja sua real ordem de preferência. As soluções propostas para os problemas apresentados a seguir também garantem a prova de estratégia.

3. Alocação de bens indivisíveis

Foi estudado o problema da alocação de casas para entender o modelo de alocação de bens indivisíveis. Nesse problema temos um conjunto N = {1,2,…,n} de negociantes e cada negociante possui inicialmente uma casa. As casas são transferíveis e os negociantes podem trocar de casa usando como moeda a sua própria casa. Cada negociante possui também uma ordem de preferência estrita sobre as n casas em questão, ou seja, uma lista ordenada das casas, desde a casa que mais gosta até a casa que menos gosta, sem empates. Nosso objetivo é realocar as casas entre os negociantes, de forma a satisfazer algumas condições, chegando a uma alocação dita estável.

A casa j denota a casa inicial do negociante j. Para descrever uma alocação de casas usaremos um vetor x de tamanho n, onde x_i é o número da casa atribuída ao negociante i. Assim temos a alocação inicial $x_i = i$, para i de 1 a n.

Uma alocação de casas x deve satisfazer $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$, ou seja, uma casa só pode pertencer a um negociante, e será então uma *alocação viável*. O contrário também deve ser válido: todo negociante só pode possuir uma única casa.

Intuitivamente, uma alocação estável das casas ocorre quando nenhum conjunto de negociantes preferiria trocar entre si suas casas iniciais ao receber as casas que lhes foram alocadas. Tal conjunto de negociantes é chamado de *conjunto bloqueador*. Assim um conjunto bloqueador S pode chegar a uma alocação mais favorável a cada pessoa de S, ou seja, onde cada pessoa de S recebe uma casa que não seja pior na sua ordem de preferência, e pelo menos uma delas recebe uma casa melhor na sua ordem de preferência. Uma alocação que não possui nenhum conjunto bloqueador é uma alocação *estável*. O conjunto de todas as alocações estáveis é chamado *núcleo*.

Teorema 3.1 *O núcleo sempre consiste de uma única alocação e o algoritmo abaixo a encontra.*

Algoritmo TTCA (N)

- **enquanto** $N \neq \emptyset$ **faça**
  - $G \leftarrow (N, \emptyset)$
  - **para** todo $u \in N$ **faça**
    - seja v o negociante cuja casa é de maior preferência para u dentre os negociantes em N
    - $E(G) \leftarrow E(G) \cup \{uv\}$
  - **para** todo circuito C em G **faça**
    - **para** todo vértice $v \in C$ **faça**
      - seja u em N tal que a aresta $vu \in E(C)$
      - $A(v) \leftarrow u$
    - $N \leftarrow N \setminus V(C)$
- **devolva** A

4. Leilões combinatórios

Outro problema que foi estudado é outro bom exemplo para explorar alguns aspectos de problemas da área de teoria dos jogos. No problema dos *Leilões Combinatórios* temos os objetos que estão sendo leiloados e os compradores. Os objetos são vendidos todos em um mesmo leilão, ao mesmo tempo. Cada comprador possui preferências sobre conjuntos de objetos, estabelecendo um certo valor que acha ideal para cada conjunto de objetos, e não apenas para cada objeto pois os objetos têm dependências entre si. O objetivo neste problema é encontrar uma forma de definir qual comprador ficará com cada objeto ao fim do leilão, de forma a maximizar a soma do valor ideal dado por cada comprador ao conjunto de objetos que receberá, o que chamamos de *bem estar social*.

Para definir o problema podemos denotar quantidade de compradores por n, e a quantidade de objetos por m. Cada comprador i expressa, para todo conjunto S de objetos, o valor por receber S com um número $v_i(S)$. Vamos chamar tal número de *valor ideal* do comprador i sobre o conjunto de objetos S.

Encontramos algumas dificuldades ao tentar resolver o problema. Observe que a valoração de cada comprador é potencialmente de tamanho exponencial no número de objetos, dado que ele deve valorar cada conjunto de objetos. Por isso, vamos tratar de um caso bem restrito do problema, onde cada comprador está interessado apenas em um conjunto específico de objetos, estabelecendo valor ideal zero para qualquer conjunto de objetos que não contém o conjunto de objetos em que está interessado. Tais compradores são chamados de *compradores focados*. Ao adicionarmos essa restrição ao problema dos leilões combinatórios, temos um novo problema que chamamos de *problema dos leilões combinatórios com compradores focados*.

Teorema 4.1 *O problema do leilão combinatório com compradores focados é NP-difícil.*

Alguns casos especiais do problema dos leilões combinatórios com compradores focados podem ser resolvidos em tempo polinomial. Mas no caso geral, é um problema difícil. Além disso, a existência de uma $m^{1/2-\epsilon}$-aproximação para o problema é possível apenas se P = NP. Visto isso, vamos apresentar um algoritmo que é uma $m^{1/2}$-aproximação para o problema. O algoritmo guloso a seguir deve-se a Lehmann [3].

Algoritmo LCS-SM (S, v, n)

- Ordene$(S, v, n) : v_1/\sqrt{|S_1|} \geq \ldots \geq v_n/\sqrt{|S_n|}$
- $W \leftarrow \emptyset$ $\quad U \leftarrow \emptyset$
- **para** $i \leftarrow 1$ **até** n **faça**
  - **se** $S_i \cap U = \emptyset$
    - **então** $W \leftarrow W \cup \{i\}$
      - $U \leftarrow U \cup S_i$
- **devolva** W

5. Leilões para publicidade associada à busca

Em sites com mecanismos de busca, costumamos encontrar publicidade em alguns locais da página, com assuntos relacionados à busca feita por um usuário. Esses locais da página são pré-determinados, e portanto, limitados.

Aggarwal, Muthukrishnan, Pál e Pál [2] consideraram o seguinte problema: encontrar uma maneira de alocar os locais da página (*itens*) aos publicitários (*compradores*) de forma a maximizar a satisfação dos publicitários (que será definida como *utilidade*), usando os conceitos de *alocação estável* e *alocação ótima*. Para isso, cada publicitário deve fazer uma proposta ao dono da página (*vendedor*) com o valor que pretende pagar por cada local da página. O mecanismo proposto por estes autores para encontrar tal alocação nos permite especificar valores mínimos e máximos diferentes que cada publicitário poderá pagar por cada local da página, onde o valor mínimo é definido pelo próprio dono da página, e o valor máximo pelo publicitário. Esse mecanismo consiste em encontrar *caminhos alternantes de peso mínimo* em um grafo bipartido definido pelos compradores e pelos itens.

6. Conclusão

Conseguimos explorar problemas interessantes que nos trazem uma boa visão sobre problemas da área de teoria dos jogos. Foram apresentadas soluções para cada um dos problemas, acompanhadas de suas provas. Além disso, foi possível perceber que os problemas estudados e suas variantes podem ser usados para resolver problemas reais.

Referências

[1] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, and V. Vazirani, *Algorithmic Game Theory*, Cambridge University Press, 2007.

[2] Gagan Aggarwal and S. Muthukrishnan and Dávid Pál and Martin Pál, *General Auction Mechanism for Search Advertising*, CoRR **abs/0807.1297** (2008).

[3] Daniel and Oćallaghan Lehmann Liadan Ita and Shoham, *Truth revelation in approximately efficient combinatorial auctions*, J. ACM **49** (2002), no. 5, 577–602, DOI http://doi.acm.org/10.1145/585265.585266.

[4] D. Gale and L.S. Shapley, *College Admissions and the Stability of Marriage*, The American Mathematical Monthly **69** (1962), no. 1, 9–15.

[5] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and Intractability: a Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, 1979.