



IME - Instituto de  
Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo



# Monografia

*Renata Luiza dos Santos Claro e Thiago Figueiredo da Silva*

*Universidade de São Paulo  
Instituto de Matemática e Estatística  
Bacharelado em Ciência da Computação*

# **Uma Ferramenta para Simulação de Leilões**

*Professor Orientador: Flávio Soares Correa da Silva*

# Índice

Introdução.....	3
Leilões.....	4
O que é um leilão? .....	4
Tipos de leilão .....	4
Teoria dos Jogos .....	5
Equilíbrio de Nash .....	5
Teorema Minimax (Situação de soma zero).....	6
Teoria dos Leilões.....	7
Modelagem.....	7
Teoria da Equivalência de Receitas.....	8
Design de Mecanismos.....	9
Equilíbrio Bayesiano .....	11
Referências.....	12

# Introdução

A realização de leilões ocorre, com frequência, em várias partes do mundo, desde o século XVII. Existe uma aplicação dos leilões que é voltada para o entretenimento. Geralmente, quando deseja-se vender um objeto raro (tais como pinturas, antiguidades ou itens de coleção) e existem muitos compradores interessados, faz-se um leilão.

Entretanto, os leilões são também economicamente importantes para um país. Algumas de suas aplicações incluem: venda de licitações, venda de negócios e venda de recursos naturais. Empresas telefônicas compram o direito de uso de partes do espectro eletromagnético através de um leilão. Já outras empresas compram licenças de exploração de recursos naturais também através de leilões.

Portanto, é essencial a condução do estudo das várias modalidades de leilão, de maneira a verificar a robustez de cada um em relação ao preço final do produto leiloado. É possível, através da possibilidade de simulação que a informática nos permite, facilitar o trabalho dos estatísticos e acelerar esses estudos.

# Leilões

## O que é um leilão?

Um leilão é um processo de compra e venda de serviços ou produtos. Nele, os participantes (dois ou mais) fazem ofertas e, ao final, a melhor oferta é vencedora.

## Tipos de leilão

-Leilão inglês: é o mais comum, os participantes fazem ofertas abertas, maiores do que as anteriores. O leiloeiro pode anunciar os preços ou os participantes podem escolhê-los. O leilão termina quando ninguém mais fizer ofertas. O vendedor também pode escolher um preço de “reserva”, se o preço final não ultrapassar o de reserva o vendedor pode optar por aceitar ou não vender.

-Leilão holandês: o leiloeiro começa com um preço alto e vai diminuindo até algum participante aceitar pagar o preço.

-Primeira oferta selada: todos os participantes enviam ofertas seladas para o leiloeiro, para que apenas ele conheça todas as ofertas. A maior oferta ganha. Apenas uma oferta é permitida por participante.

-Leilão de Vickrey: também conhecido como “segunda oferta selada”, criado por William Vickrey. Funciona igual ao anterior, o vencedor é quem fizer a maior oferta, porém ele paga o valor da segunda maior oferta.

-Buyout: existe um preço de buyout, um participante pode escolher aceitar esse preço e o leilão termina. Esse preço pode ser temporário, perde a validade a partir da primeira oferta, ou permanente, vale até o fim do leilão.

-Todos pagam: todos os participantes pagam as suas ofertas, ganhando ou não. O vencedor é quem fizer a maior oferta.

-Guerra de atrito: possui um custo para se manter jogando. Por exemplo, o participante paga por lances feitos.

# Teoria dos Jogos

É um ramo da matemática aplicada que estuda situações estratégicas nas quais jogadores escolhem diferentes ações na tentativa de melhorar seu retorno. Tem a finalidade de prever o movimento dos outros jogadores, sejam eles concorrentes ou aliados.

Inicialmente a Teoria dos Jogos foi desenvolvida como uma maneira de estudar comportamentos econômicos. Mais tarde, foi utilizada para definir estratégias nucleares, hoje é estudada em diversos meios acadêmicos. Vem sendo aplicada nas ciências políticas, na ética, na economia, filosofia, jornalismo, e, finalmente, despertou a atenção das ciências da computação, que a tem utilizado para promover avanços da inteligência artificial e cibernética.

A Teoria estuda decisões que são tomadas em um ambiente no qual vários jogadores interagem. Estuda as escolhas de comportamentos ótimos quando o custo e benefício de cada opção não é fixo, mas depende da escolha de outros indivíduos.

## Equilíbrio de Nash

Até 1950, a Teoria dos Jogos só era capaz de resolver os jogos não-cooperativos, rivalidades puras e os de lucro zero. John Nash mudou esse conceito transformando rivalidade em lucro mútuo.

Nash demonstrou um teorema que generalizou o teorema minimax para o caso de jogos sem soma zero, envolvendo dois ou mais jogadores, e para jogadores em competição direta. Desenvolveu os chamados "jogos não-cooperativos" para  $n$  pessoas, de soma zero ou não, no qual cada jogador dispõe de um número finito de estratégias puras e tem, pelo menos, um conjunto de estratégias de equilíbrio.

Um conjunto de estratégias constitui um Equilíbrio de Nash se a escolha de cada jogador for ótima, dada a escolha de todos os jogadores.

O dilema do prisioneiro é um problema da teoria dos jogos e um exemplo claro, mas atípico, de um problema de soma não nula. Neste problema, como em outros

muitos, supõe-se que cada jogador, de modo independente, quer aumentar ao máximo a sua própria vantagem sem lhe importar o resultado do outro jogador.

	<b>Prisioneiro "B" nega</b>	<b>Prisioneiro "B" delata</b>
<b>Prisioneiro "A" nega</b>	Ambos são condenados a 6 meses	"A" é condenado a 10 anos; "B" sai livre
<b>Prisioneiro "A" delata</b>	"A" sai livre; "B" é condenado a 10 anos	Ambos são condenados a 5 anos

### Teorema Minimax (Situação de soma zero)

Segundo o teorema Minimax há sempre uma solução racional para um conflito entre dois indivíduos cujos interesses são completamente opostos, ou seja, o que é ganho por um lado, é perdido pelo outro. Esse é um exemplo da chamada situação de soma zero, uma vez que os ganhos dos dois jogadores somam zero.

A combinação de estratégias, na qual o máximo dos mínimos é igual ao mínimo dos máximos, chama-se "ponto de equilíbrio do jogo".

# Teoria dos Leilões

A Teoria dos Leilões é uma parte da Teoria dos Jogos muito utilizada em economia. Ela estuda como as pessoas agem durante leilões e as propriedades do mercado de leilões.

Existem muitas possibilidades de design, ou conjunto de regras, para um leilão. Nas quais são consideradas principalmente sua eficiência, estratégias de equilíbrio e ótimas para apostas e receita do vendedor.

Eficiência é uma medição de quanto o participante vencedor valoriza o bem adquirido. Um leilão eficiente é aquele em que o bem termina com quem mais o valoriza entre os participantes.

Também é utilizada como ferramenta para leilões reais, utilizada no setor público para definir a utilização de espectros eletromagnéticos.

Os leilões podem ser modelados de várias formas distintas, porém devem satisfazer duas condições básicas:

- 1 – Podem ser usados para vender qualquer item, são universais.
- 2 – O seu resultado não depende da identidade dos participantes, ou seja, leilões são anônimos.

Vickrey mostrou que dar um lance igual ao valor do bem é uma estratégia dominante, independente do tipo do leilão. Logo, cada participante revelará quanto o bem vale para cada um e ganha quem o considerar mais valioso.

## Modelagem

Em leilões com apostas seladas, cada participante assume que cada uma das ofertas competidores é um valor aleatório retirado de um específica distribuição de probabilidade.

Em leilões com apostas abertas, cada participante possui um valor para apostas aleatório, retirado de uma distribuição de probabilidades comum a todos. Normalmente é considerado que cada participante possui seu valor independente dos outros.

Quando é necessário fazer suposições sobre os jogadores a maioria das pesquisas publicadas utiliza o conceito de jogadores simétricos. Isso significa que a distribuição de probabilidade de cada participante é idêntica à utilizada por todos os outros. Simetria também implica que os valores dos jogadores são independentes e idênticamente distribuídas.

## Teoria da Equivalência de Receitas

Essa teoria diz que se os participantes possuem valores independentes e são neutros ao risco, assim como o leiloeiro, então todos os formatos mais conhecidos de leilões geram a mesma receita esperada para o leiloeiro.

É um resultado clássico da teoria dos leilões.

Este resultado não vale em situações tais como o de bem de valor comum, com jogadores avessos ao risco e em leilões de múltiplos itens.

Um corolário para isso é que a receita esperada do vendedor aumenta junto com o número de participantes do leilão.



# Design de Mecanismos

A "Teoria de Design de Mecanismos", também conhecida como Teoria dos Jogos Reversa, recebeu o Prêmio Nobel de Economia em 2007, representada por três economistas de escolas norte-americanas: Leonid Hurwicz, Eric Maskin e Roger Myerson.

Seus conceitos permitem identificar instituições abstratas que formam uma alocação eficiente de recursos, de acordo com os interesses de diversas classes de negociadores. Algo especialmente útil em situações nas quais as preferências dos agentes não são reveladas.

O design de mecanismos mostra, por exemplo, por que um leilão representa a melhor forma de alocar bens dentro de um conjunto de compradores potenciais, sem que saibamos as reais intenções de cada um. E também mostra qual tipo de leilão é apropriado para garantir o máximo retorno esperado por parte do vendedor.

Antes da elaboração da teoria, a análise microeconômica dos mecanismos de distribuição ótima estava restrita ao desempenho dos mercados. A pergunta principal era: "Como os mercados conseguem alocar recursos de maneira eficiente?".

As respostas apareciam dentro de modelos teóricos, mas exigiam premissas com pouco apelo concreto, tal como informação perfeita, interesses privados e ausência de externalidades. Ou seja, o equilíbrio era previsto pela teoria. Mas alcançá-lo na prática parecia muito mais difícil.

Pensando nesse obstáculo, Hurwicz procurou desenvolver o mecanismo, que simula o que há de melhor nas trocas livres. A partir daí, o objetivo científico mudou. Economistas como Hurwicz, Maskin e Myerson passaram a discutir o design de mecanismos, com base nas necessidades de grandes grupos sociais. Esse caminho levou a avanços significativos em campos antes saturados, como regulação, tributação, eleições e finanças corporativas.

Depois de elaborado o algoritmo, o economista deve considerar diferentes equilíbrios previstos pelo conjunto de soluções. Os equilíbrios podem corresponder a

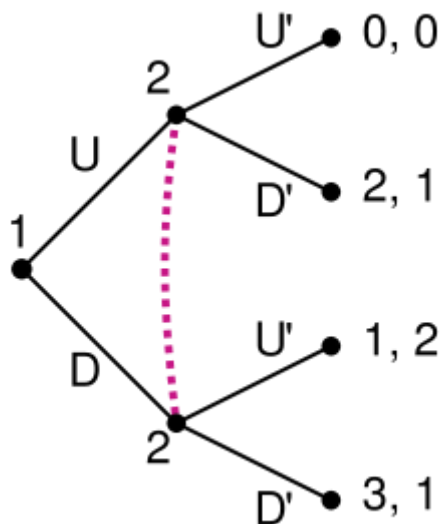
situações ótimas sob perspectivas diversas. Isto é, de acordo com a posição de cada classe de agentes. Como exemplo, um mesmo mecanismo pode favorecer os compradores ou chegar ao maior preço de venda.

Felizmente, a teoria agraciada com o Nobel de 2007 fornece os meios para que um planejador descubra qual arranjo é preferido por determinado grupo. Dessa forma, a instituição é definida deliberadamente.

## Equilíbrio Bayesiano

Em um jogo Bayesiano os jogadores esperam maximizar seus ganhos com base em suas crenças sobre a estratégia do adversário. O Equilíbrio Bayesiano de Nash é definido como um perfil de estratégia aonde cada jogador tem determinada crença sobre o jogo do adversário de forma a maximizar os ganhos de cada um não importando a estratégia escolhida pelos adversários. No entanto é um equilíbrio em que os jogadores jogam seqüencialmente ao invés de simultaneamente.

Para refinar tal equilíbrio pode-se aplicar o conceito de Equilíbrio Bayesiano Perfeito, que determina que o jogo subsequente é sempre ótimo. A idéia de racionalidade seqüencial é o que determina que o jogo subsequente seja sempre ótimo. Essa idéia é a de que o ganho esperado do jogador que “está com a vez” é máximo, dadas as jogadas feitas anteriormente pelos outros jogadores.



A informação no jogo acima é imperfeita, uma vez que o jogador 2 não sabe o que o jogador 1 fará quando for jogar. Agora, aplicando as regras do equilíbrio Bayesiano perfeito temos:

O jogador 2 não pode observar a escolha do jogador 1. O jogador 1 quer enganar o jogador 2 fazendo-o pensar que ele jogou U quando na realidade ele jogou D, então o jogador 2 irá jogar D' e o jogador 1 vai receber 3. Na verdade, há um equilíbrio Bayesiano perfeito quando o jogador 1 joga D e o jogador 2 joga U', então o jogador 2 continua acreditando que o jogador 1 vai mesmo jogar D. Neste equilíbrio, toda a estratégia é racional dado que as crenças se mostraram verdadeiras e cada crença é consistente em relação a estratégia colocada em prática. Neste caso, o equilíbrio Bayesiano perfeito é o único equilíbrio de Nash possível.

## Referências

Algorithmic Game Theory – Noam Nisan, Tim Roughgarden, Éva Tardos, Vijay V. Vazirani

A Course in Game Theory – Martin J. Osborne, Ariel Rubinstein

Análise Estratégica de Investimentos e de Decisões com Teoria dos Jogos e Jogo com Opções Reais – Marco Antônio Guimarães Dias