Caminhos mais longos em um grafo

Susanna Figueiredo de Rezende

Orientadora: Yoshiko Wakabayashi

IME - USP

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

15 de novembro de 2011

Grafos

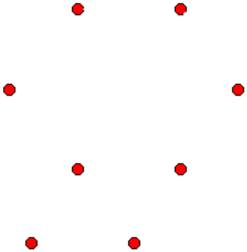
- $G = (V, E)$
- V: Vértices
- E: Arestas (pares não ordenados de vértices)

Grafos

- $G = (V, E)$
- V: Vértices
- E: Arestas (pares não ordenados de vértices)

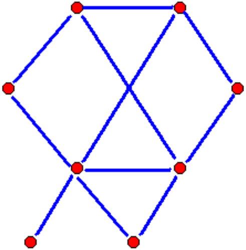
Grafos

- $G = (V, E)$
- V: Vértices
- E: Arestas (pares não ordenados de vértices)



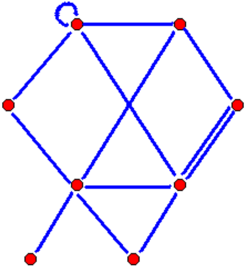
Grafos

- $G = (V, E)$
- V: Vértices
- E: Arestas (pares não ordenados de vértices)



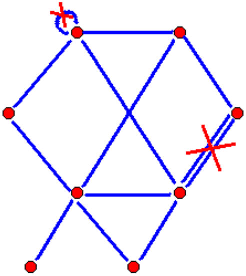
Grafos

- $G = (V, E)$
- V: Vértices
- E: Arestas (pares não ordenados de vértices)



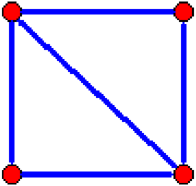
Grafos

- $G = (V, E)$
- V: Vértices
- E: Arestas (pares não ordenados de vértices)



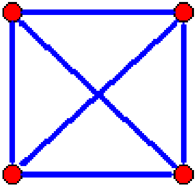
Planaridade

- Planar
- Não-planar



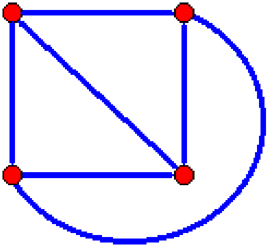
Planaridade

- Planar
- Não-planar



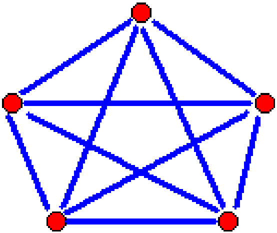
Planaridade

- Planar
- Não-planar



Planaridade

- Planar
- Não-planar

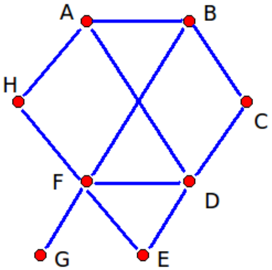


Caminhos

- P: Caminho
  - Sequência de vértices (e arestas) **distintos**
  - Exemplo: C-D-F-B
  - Comprimento: 3
  - Não é caminho: C-D-F-B-A-H-F-E

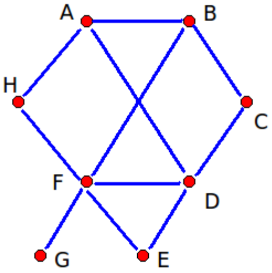
Caminhos

- P: Caminho
  - Sequência de vértices (e arestas) distintos
  - Exemplo: C-D-F-B
  - Comprimento: 3



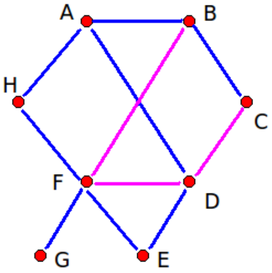
Caminhos

- P: Caminho
  - Sequência de vértices (e arestas) **distintos**
  - Exemplo: C-D-F-B
  - Comprimento: 3
  - Não é caminho: C-D-F-B-A-H-F-E



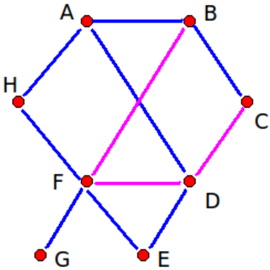
Caminhos

- P: Caminho
  - Sequência de vértices (e arestas) **distintos**
  - Exemplo: C-D-F-B
  - Comprimento: 3
  - Não é caminho: C-D-F-B-A-H-F-E



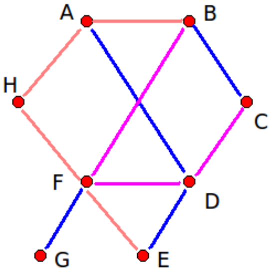
Caminhos

- P: Caminho
  - Sequência de vértices (e arestas) **distintos**
  - Exemplo: C-D-F-B
  - Comprimento: 3
  - Não é caminho: C-D-F-B-A-H-F-E



Caminhos

- P: Caminho
  - Sequência de vértices (e arestas) **distintos**
  - Exemplo: C-D-F-B
  - Comprimento: 3
  - Não é caminho: C-D-F-B-A-H-F-E



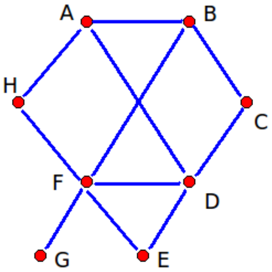
Caminho

- C: Circuito
  - Sequência de vértices (e arestas) distintos exceto nas extremidades
  - Exemplo: C-D-F-B-C

    Comprimento: 4

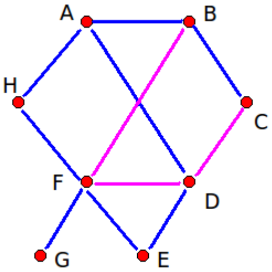
Caminho

- C: Circuito
  - Sequência de vértices (e arestas) distintos exceto nas extremidades
  - Exemplo: C-D-F-B-C
  - Comprimento: 4



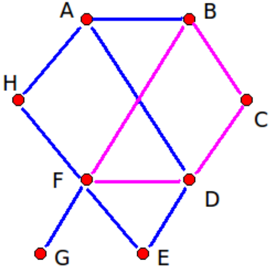
Caminho

- C: Circuito
  - Sequência de vértices (e arestas) distintos exceto nas extremidades
  - Exemplo: C-D-F-B-C
  - Comprimento: 4



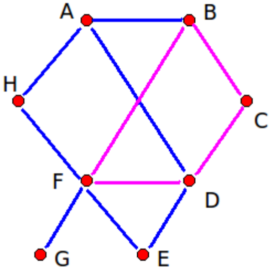
Caminho

- C: Circuito
  - Sequência de vértices (e arestas) distintos exceto nas extremidades
  - Exemplo: C-D-F-B-C
  - Comprimento: 4



Caminho

- C: Circuito
  - Sequência de vértices (e arestas) distintos exceto nas extremidades
  - Exemplo: C-D-F-B-C
  - Comprimento: 4



Dois problemas relacionados

- Encontrar caminho mais curto
- Encontrar caminho mais longo

Dois problemas relacionados

- Encontrar caminho mais curto
- Encontrar caminho mais longo

Dois problemas relacionados

- Encontrar caminho mais curto
- Encontrar caminho mais longo

Dois problemas relacionados

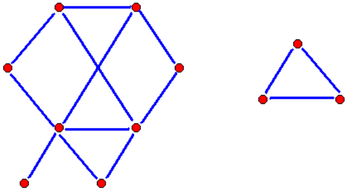
- Encontrar caminho mais curto
- Encontrar caminho mais longo

Grafos conexos

Dois problemas relacionados

- Encontrar caminho mais curto
- Encontrar caminho mais longo

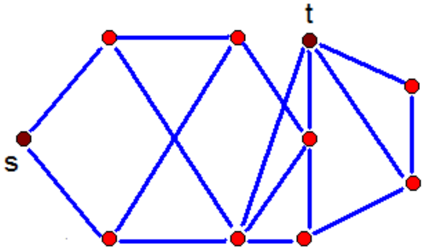
Grafo não-conexo:



Dois problemas relacionados

Dificuldade

- Encontrar caminho mais curto:

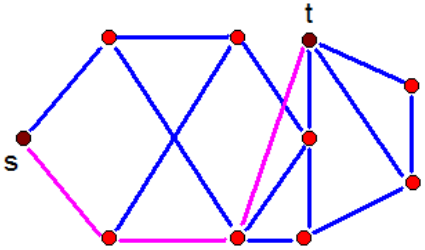


- Dificuldade
- Prova

Dois problemas relacionados

Dificuldade

- Encontrar caminho mais curto:

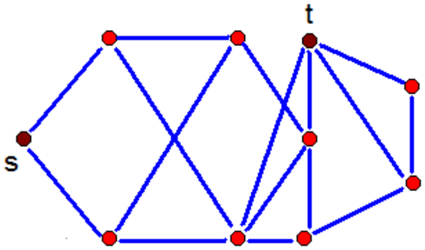


- Dificuldade
- Prova

Dois problemas relacionados

Dificuldade

- Encontrar caminho mais longo:

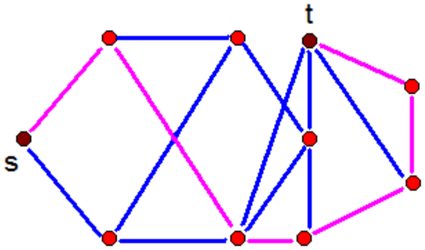


- Dificuldade
- Prova

Dois problemas relacionados

Dificuldade

- Encontrar caminho mais longo:

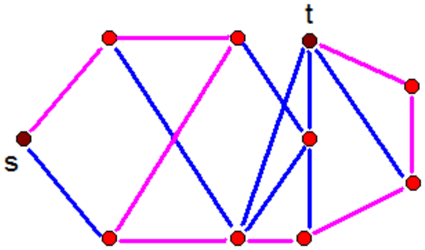


- Dificuldade
- Prova

Dois problemas relacionados

Dificuldade

- Encontrar caminho mais longo:

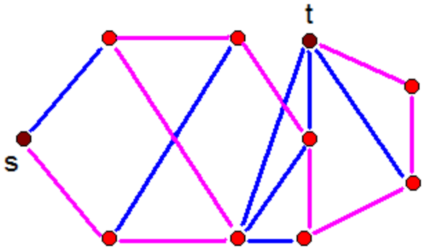


- Dificuldade
- Prova

Dois problemas relacionados

Dificuldade

- Encontrar caminho mais longo:

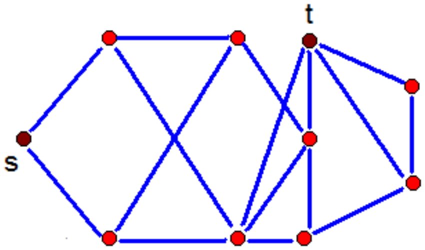


- Dificuldade
- Prova

Dois problemas relacionados

Dificuldade

- Mais curto vs. mais longo

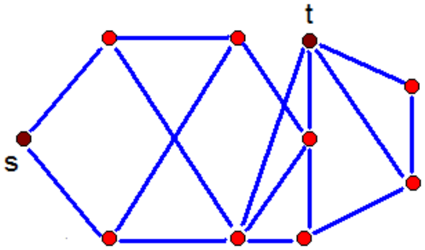


- Dificuldade
- Prova

Dois problemas relacionados

Dificuldade

- Mais curto vs. mais longo

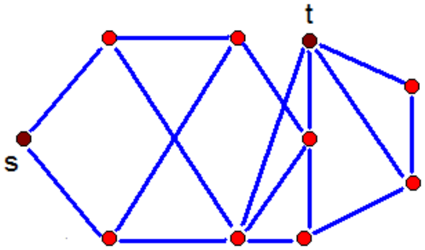


- Dificuldade
- Prova

Dois problemas relacionados

Dificuldade

- Mais curto vs. mais longo



- Dificuldade
- Prova

Dois problemas relacionados

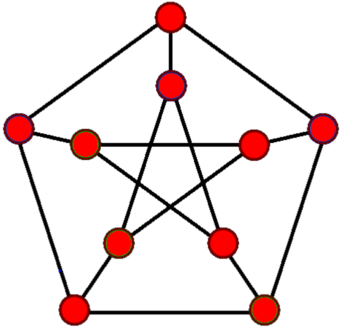
Motivação

- Caminho Hamiltoniano
- Biologia Computacional
- PERT: Program Evaluation and Review Technique

Dois problemas relacionados

Motivação

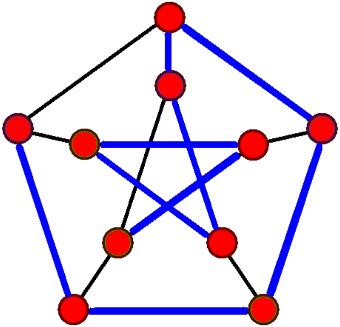
- Caminho Hamiltoniano
- Biologia Computacional
- PERT: Program Evaluation and Review Technique



Dois problemas relacionados

Motivação

- Caminho Hamiltoniano
- Biologia Computacional
- PERT: Program Evaluation and Review Technique

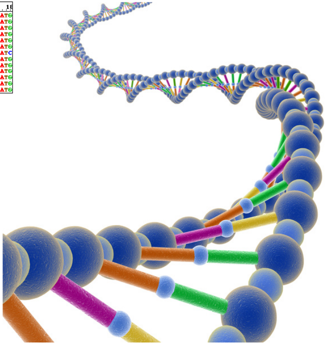


Dois problemas relacionados

Motivação

- Caminho Hamiltoniano
- Biologia Computacional
- PERT: Program Evaluation and Review Technique

Name	1810
E._coli	GTACCTTTTGTATAATG
Sal.ariz	GTACCTTTTGTATAATG
Sal.typh	GTACCTTTTGTATAATG
Ps.aerug	GTACCTTTTGTATAATG
Ps.cepac	GTACCTTTTGTATAATG
Rhb.caps	GTACCTTTTGTATAATG
Rum.amin	GTACCTTTTGTATAATC
Chl.trac	GTGCCTTTTGCATGATG
Mic.lute	GTGCCTTTTGAAGAATG
Ana.nid1	GTGCCTGTTGAAGAATG
Ana.nid2	GTGCCTGTTGAAGAATG
maize_ch	GTGCCTGTTGAAGAATG
lvrwrt_c	GTGCCTGTTGAAGAATG

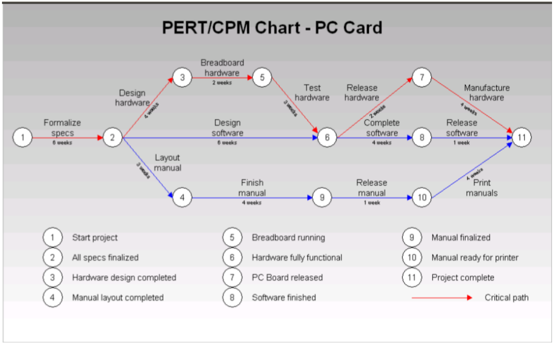


www.fmph.org and www.connect-in.com

Dois problemas relacionados

Motivação

- Caminho Hamiltoniano
- Biologia Computacional
- PERT: Program Evaluation and Review Technique



O problema do caminho mais longo

Problema

Encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

- $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários.
- Para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais:

O problema do caminho mais longo

Problema

Encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

- $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários.
- Para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais:

O problema do caminho mais longo

Problema

Encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

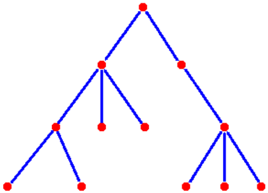
- $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários.
- Para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais:

O problema do caminho mais longo

Problema

Encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

- $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários.
- Para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais:
  Árvores (Dijkstra '60)

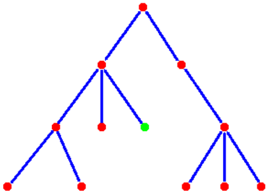


O problema do caminho mais longo

Problema

Encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

- $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários.
- Para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais:
  Árvores (Dijkstra '60)

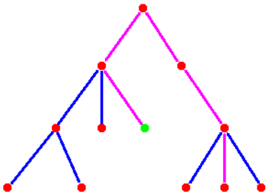


O problema do caminho mais longo

Problema

Encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

- $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários.
- Para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais:
  Árvores (Dijkstra '60)

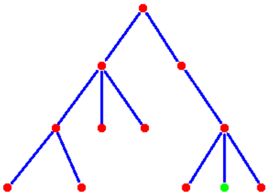


O problema do caminho mais longo

Problema

Encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

- $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários.
- Para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais:
  Árvores (Dijkstra '60)

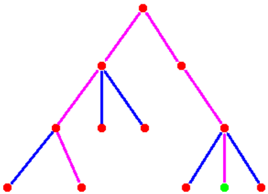


O problema do caminho mais longo

Problema

Encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

- $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários.
- Para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais:
  Árvores (Dijkstra '60)

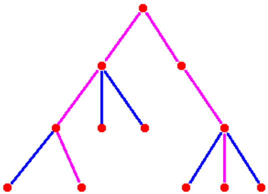


O problema do caminho mais longo

Problema

Encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

- $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários.
- Para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais:
  Árvores (Dijkstra '60)

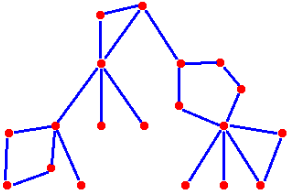


O problema do caminho mais longo

Problema

Encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

- $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários.
- Para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais:
  Cactus (Uehara e Uno '05)

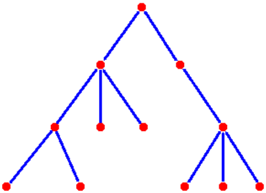


O problema do caminho mais longo

Problema

Encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

- $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários.
- Para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais:
  Cactus (Uehara e Uno '05)

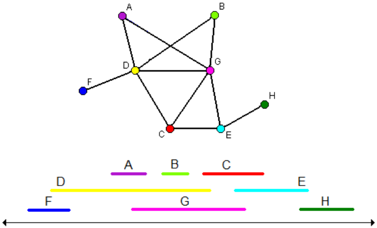


O problema do caminho mais longo

Problema

Encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

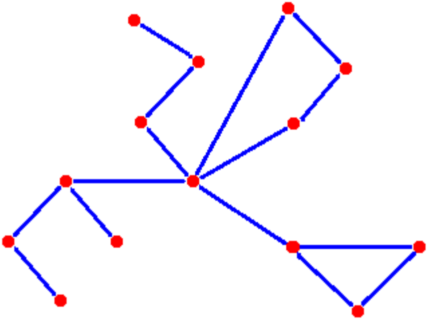
- $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários.
- Para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais:
  Grafos de intervalo (Ioannidou e outros '10)



Intersecção de 2 caminhos mais longos

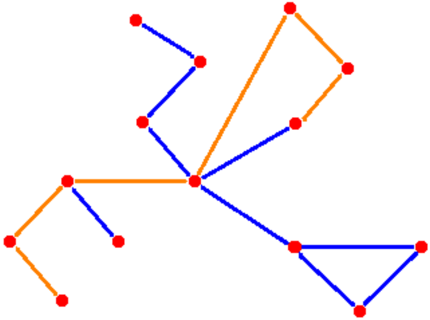
Intersecção de 2 caminhos mais longos

Encontrar caminhos mais longos distintos:



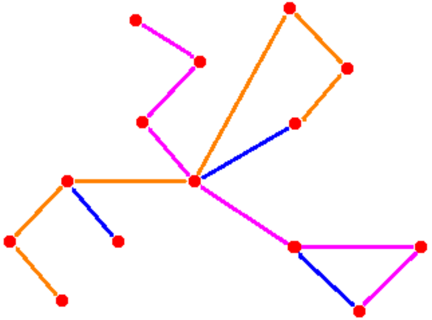
Intersecção de 2 caminhos mais longos

Encontrar caminhos mais longos distintos:



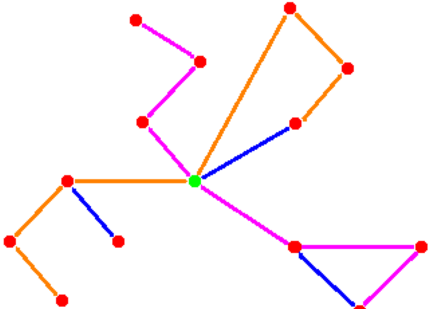
Intersecção de 2 caminhos mais longos

Encontrar caminhos mais longos distintos:



Intersecção de 2 caminhos mais longos

Encontrar caminhos mais longos distintos:



Sempre acontece?

Intersecção de 2 caminhos mais longos

Asserção

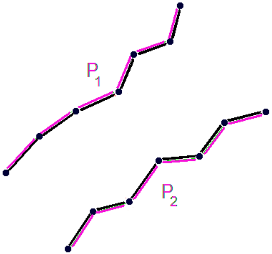
Quaisquer 2 caminhos mais longos se intersectam.

Intersecção de 2 caminhos mais longos

Asserção

Quaisquer 2 caminhos mais longos se intersectam.

P_1 e P_2: caminhos mais longos
M: caminho (mínimo) que liga P_1 a P_2

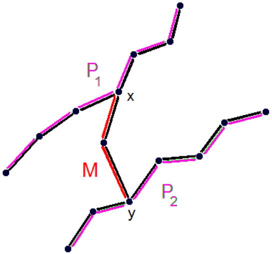


Intersecção de 2 caminhos mais longos

Asserção

Quaisquer 2 caminhos mais longos se intersectam.

P_1 e P_2: caminhos mais longos
M: caminho (mínimo) que liga P_1 a P_2

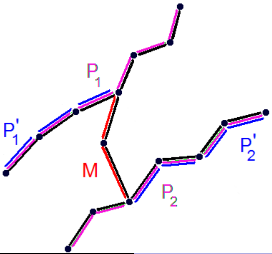


Intersecção de 2 caminhos mais longos

Asserção

Quaisquer 2 caminhos mais longos se intersectam.

P'_1: maior segmento de P_1
P'_2: maior segmento de P_2

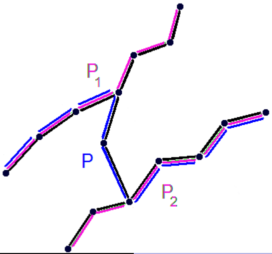


Intersecção de 2 caminhos mais longos

Asserção

Quaisquer 2 caminhos mais longos se intersectam.

$P = P'_1 \cdot M \cdot P'_2$
$\|P\| \geq \|P1\| + \|M\|$



Intersecção de caminhos mais longos

- Para 2 é verdade.
- E para...

Intersecção de caminhos mais longos

- Para 2 é verdade.
- E para...

Intersecção de caminhos mais longos

- Para 2 é verdade.
- E para...

Fonte: www.lunchoverip.com

Intersecção de caminhos mais longos

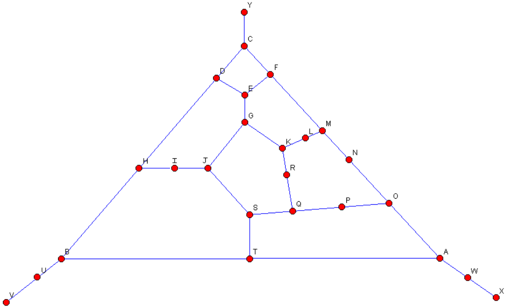
Gallai ('66):

Problema $\mathcal{P}_\infty$

Para qualquer grafo G, existe sempre um vértice comum a todos os caminhos mais longos?

Primeiro exemplo

- Walther ('69)
- 25 vértices
- 13 caminhos



Perguntas

Novas perguntas, Zamfirescu ('72):

- Este exemplo é minimal?
- E com restrições (planaridade, maior conectividade)?
- Para que classes de grafos a propriedade é verdade?
- E a intersecção de apenas alguns caminhos mais longos?

Perguntas

Novas perguntas, Zamfirescu ('72):

- Este exemplo é minimal?
- E com restrições (planaridade, maior conectividade)?
- Para que classes de grafos a propriedade é verdade?
- E a intersecção de apenas alguns caminhos mais longos?

Perguntas

Novas perguntas, Zamfirescu ('72):

- Este exemplo é minimal?
- E com restrições (planaridade, maior conectividade)?
- Para que classes de grafos a propriedade é verdade?
- E a intersecção de apenas alguns caminhos mais longos?

Perguntas

Novas perguntas, Zamfirescu ('72):

- Este exemplo é minimal?
- E com restrições (planaridade, maior conectividade)?
- Para que classes de grafos a propriedade é verdade?
- E a intersecção de apenas alguns caminhos mais longos?

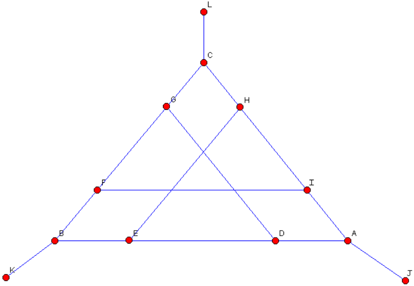
Perguntas

Novas perguntas, Zamfirescu ('72):

- Este exemplo é minimal?
- E com restrições (planaridade, maior conectividade)?
- Para que classes de grafos a propriedade é verdade?
- E a intersecção de apenas alguns caminhos mais longos?

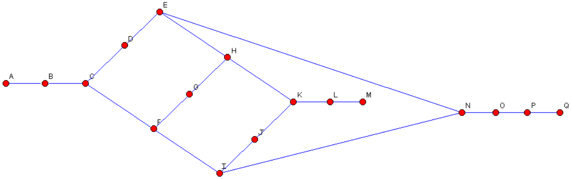
Exemplo minimal

- Walther e Zamfirescu
- Apenas 12 vértices
- 9 caminhos



Exemplo minimal planar

- Schmitz ('75)
- 17 vértices
- Planar
- 7 caminhos



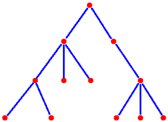
Classes especiais de grafos

- Árvores

- Grafos arco-circulares - Balister e outros '04

Classes especiais de grafos

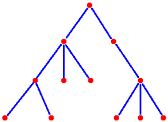
- Árvores



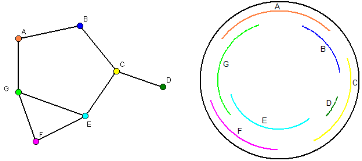
- Grafos arco-circulares - Balister e outros '04

Classes especiais de grafos

- Árvores



- Grafos arco-circulares - Balister e outros '04



3 caminhos

Em aberto:

Problema

Existe um vértice comum a quaisquer três caminhos mais longos em G?

3 CAMINHOS

Em aberto:

Problema

Existe um vértice comum a quaisquer três caminhos mais longos em G?

Axenovich ('09): Grafos Exoplanares

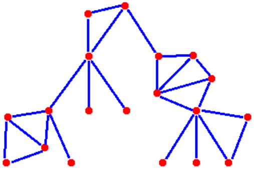
3 caminhos

Em aberto:

Problema

Existe um vértice comum a quaisquer três caminhos mais longos em G?

Axenovich ('09): Grafos Exoplanares



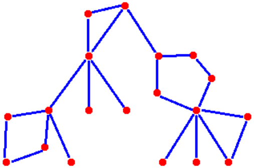
3 caminhos

Em aberto:

Problema

Existe um vértice comum a quaisquer três caminhos mais longos em G?

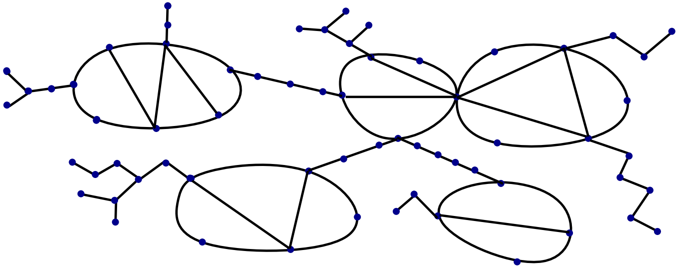
Axenovich ('09): Grafos Exoplanares



Um novo resultado

Teorema

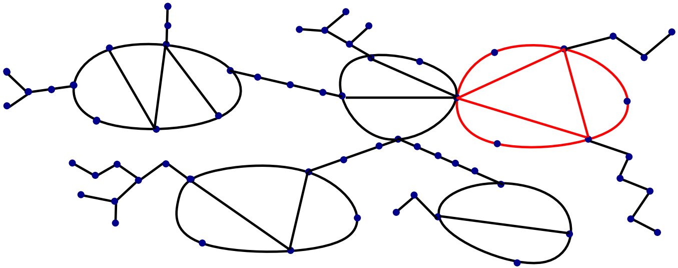
Se G é exoplanar, então existe um vértice comum a **todos** *os caminhos mais longos.*



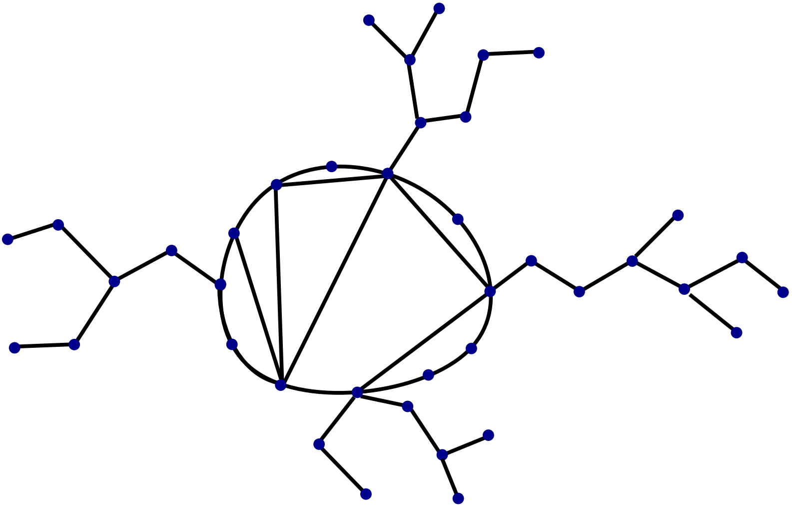
Prova

Proposição - Klavžar e Petkovšek ('90)

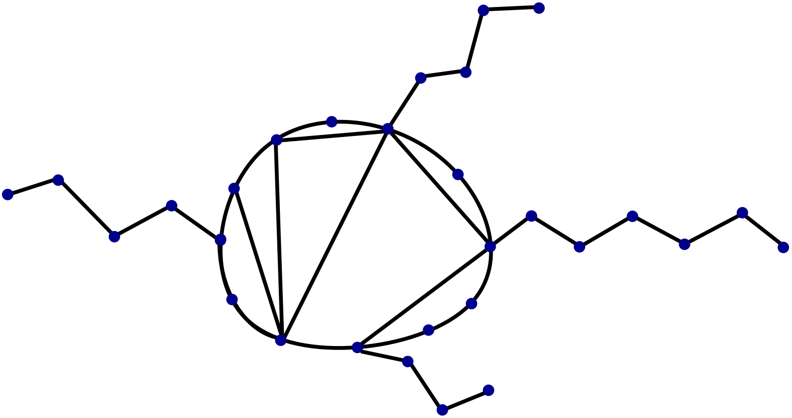
Existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em $G \Leftrightarrow$ para todo bloco B de G, todos os caminhos mais longos que têm pelo menos uma aresta em B têm um vértice em comum.



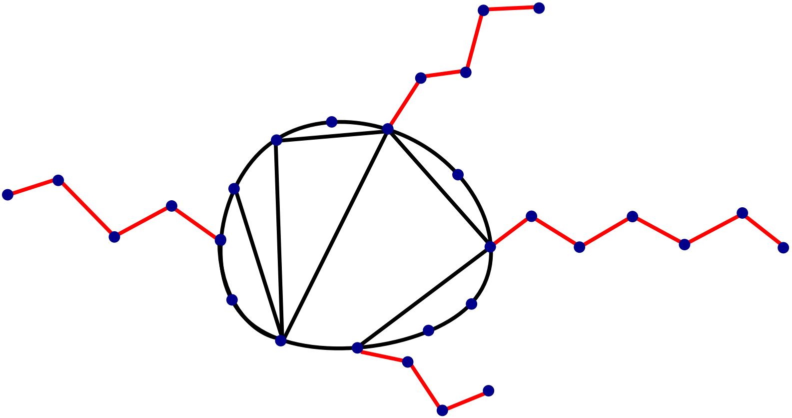
Prova



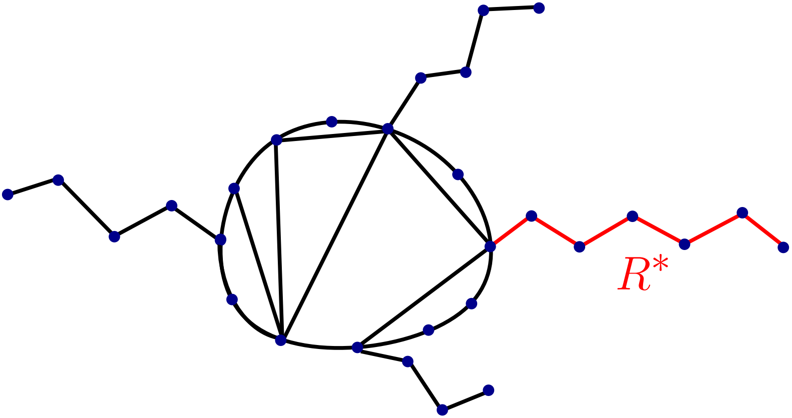
Prova



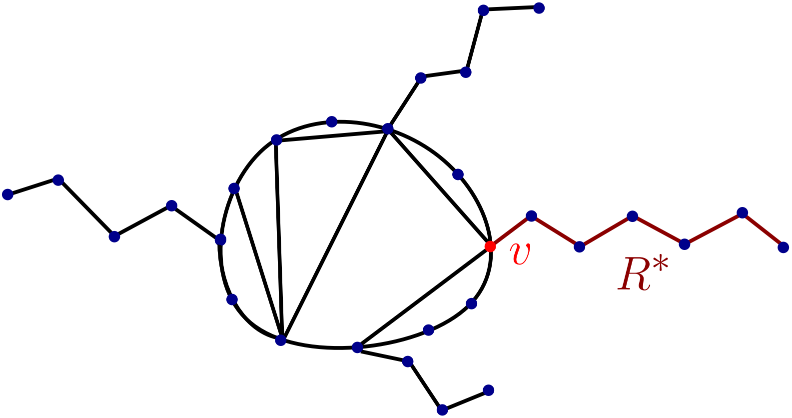
Prova



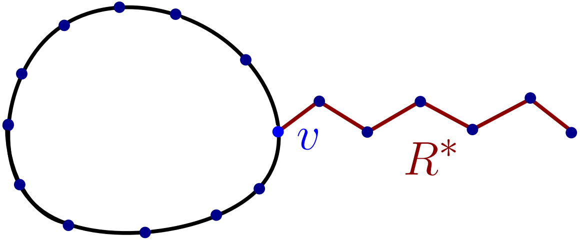
Prova



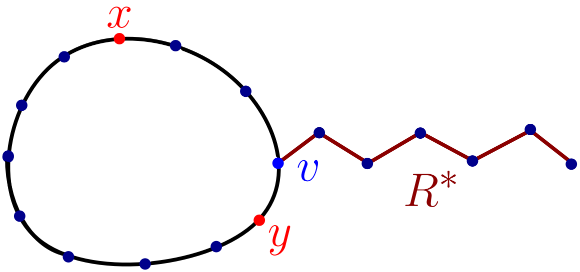
Prova



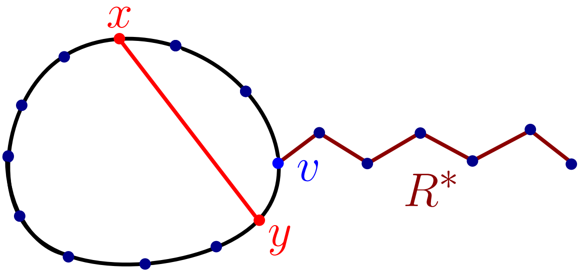
Prova



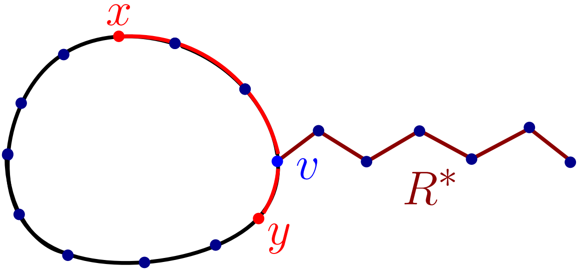
Prova



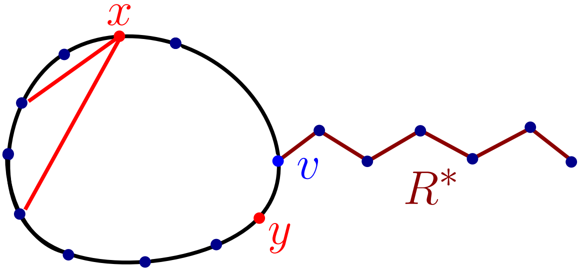
Prova



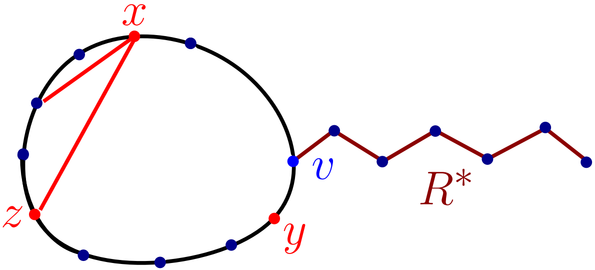
Prova



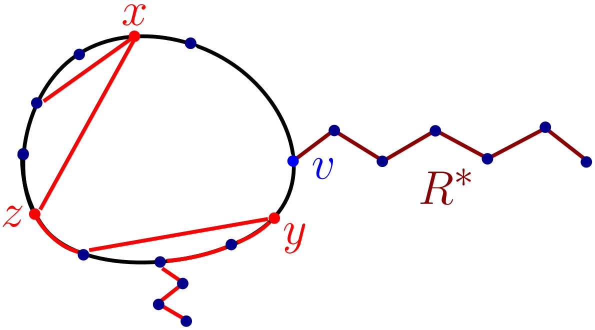
Prova



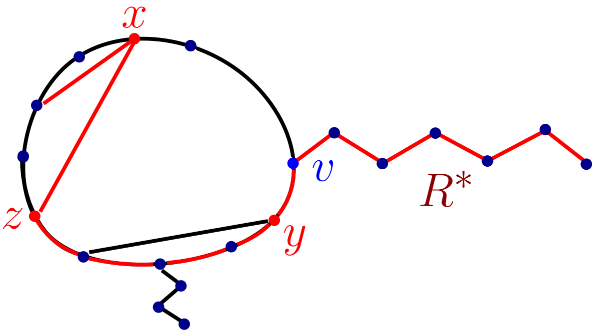
Prova



Prova



Prova



Conclusões

- Artigo Axenovich '09
- Resultado mais geral apresentado
- Outro resultado mais geral

- Problemas em aberto
- "Gap" muito grande (2 a 7)

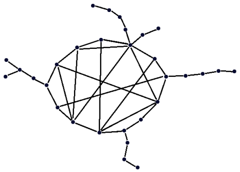
Conclusões

- Artigo Axenovich '09
- Resultado mais geral apresentado
- Outro resultado mais geral

- Problemas em aberto
- "Gap" muito grande (2 a 7)

Conclusões

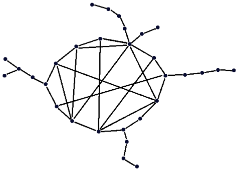
- Artigo Axenovich '09
- Resultado mais geral apresentado
- Outro resultado mais geral



- Problemas em aberto
- "Gap" muito grande (2 a 7)

Conclusões

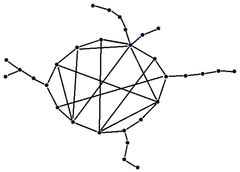
- Artigo Axenovich '09
- Resultado mais geral apresentado
- Outro resultado mais geral



- Problemas em aberto
- "Gap" muito grande (2 a 7)

Conclusões

- Artigo Axenovich '09
- Resultado mais geral apresentado
- Outro resultado mais geral



- Problemas em aberto
- "Gap" muito grande (2 a 7)

Obrigada!

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico