Caminhos mais longos em um grafo

Susanna Figueiredo de Rezende
Orientadora: Profa. Dra. Yoshiko Wakabayashi
IME - USP, São Paulo, Brasil

1. Introdução

Em teoria dos grafos, problemas sobre caminhos são uns dos mais fundamentais. Dentre estes, destaca-se o problema da existência e busca de caminhos de certos comprimentos. Nesse trabalho damos enfoque a problemas sobre caminhos mais longos. Consideramos basicamente duas classes de problemas: o de natureza algorítmica e o de natureza estrutural.

Na primeira parte, investigamos o problema de encontrar um caminho mais longo em um grafo. Este problema é $\mathcal{NP}$-difícil para grafos arbitrários. Porém, para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais para encontrar um caminho mais longo.

Na segunda parte, analisamos problemas de enfoque mais estrutural relativos à intersecção de caminhos mais longos em um grafo. Estudamos o caso em que se considera a intersecção de todos os caminhos mais longos, e também o caso em que se considera apenas um número fixo de caminhos mais longos. Além da resenha, apresentamos alguns resultados que obtivemos recentemente sobre este tópico.

2. Problema do caminho mais longo

Seja G um grafo. O "problema do caminho mais longo" se refere ao problema de encontrar um caminho de comprimento máximo em G.

A versão de decisão deste problema é:

Problema 1: *Dado $k \in \mathbb{N}$, decidir se há em G um caminho de comprimento $\geq k$.*

- Este problema é $\mathcal{NP}$-completo.
- Prova: redução do problema do caminho Hamiltoniano (sabidamente $\mathcal{NP}$-completo).
- Para provar que o problema está em $\mathcal{NP}$, basta ver que um certificado para a instância *sim* do problema é a descrição de um caminho de comprimento $\geq k$.

3. Casos particulares

Para certas classes de grafos, existem algoritmos polinomiais que resolvem o problema.

- Para árvores, é possível fazê-lo em tempo linear (por um algoritmo de Dijkstra $\sim$'60).

caminho mais longo em árvore (G)
1 Escolha qualquer folha da árvore G e nomeie-a F_1
2 Encontre um caminho mais longo em G com início F_1.
3 Chame a outra extremidade deste caminho de F_2.
4 Encontre um caminho mais longo em G com início F_2.
5 Devolva este caminho. Este é um caminho mais longo em G.

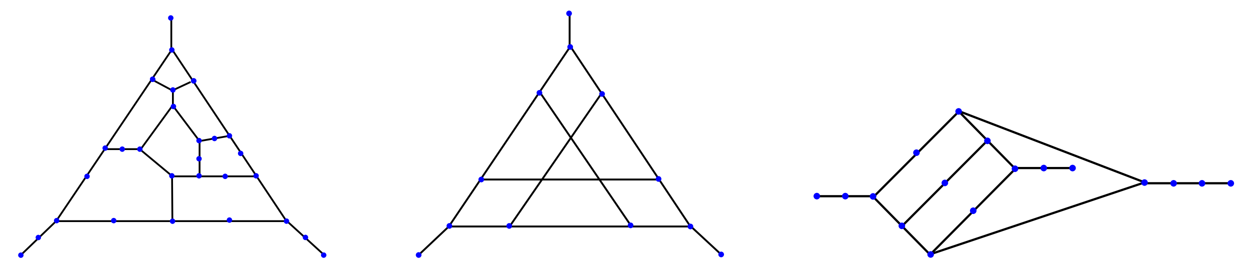
- Para grafos de blocos, cactus e grafos de permutação bipartido (subclasses de grafos intervalo) foi provado em 2007, por Uehara e Uno [UU07].
- Para grafos intervalo foi provado em 2010, por Ioannidou e outros. [IMN10].

4. Intersecção de caminhos mais longos

Em 1966, em um colóquio sobre teoria dos grafos, Gallai [Gal68] perguntou:

Problema 2: *Se G é um grafo conexo, existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em G?*

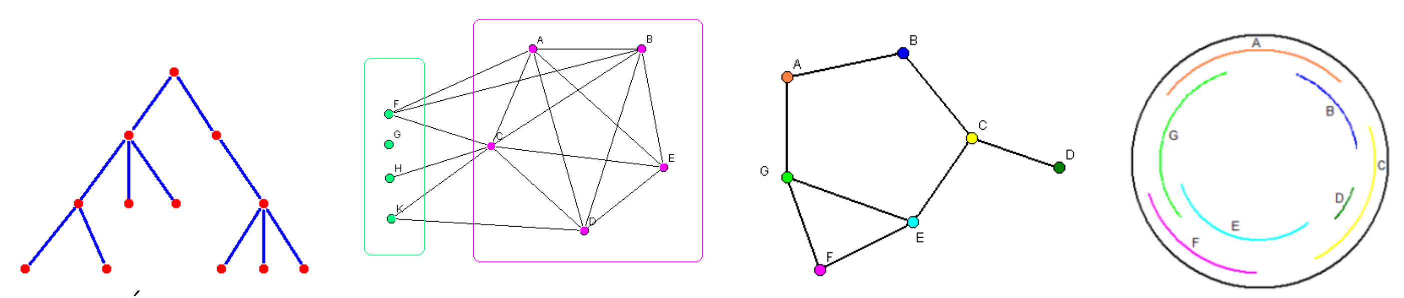
- Pouco tempo depois surgiu um primeiro exemplo, mostrando que nem sempre existe.
- Também foram produzidos outros exemplos, de ordem minimal.



Primeiro exemplo — Exemplo minimal — Exemplo planar minimal

Existem algumas classes de grafos que sempre têm um vértice comum a todos os caminhos mais longos:

- Para árvores isso é fácil de se provar.
- Para grafos divididos, cactus e outros, foi provado por Klavžar e Petkovšek [KP90].
- Para grafos arco-circulares, foi provado por Balister e outros [BGLS04].



Árvore — Grafo dividido — Grafo arco-circular

Em 1990 Klavžar e Petkovšek [KP90] provaram o seguinte resultado:

Proposição 3: *Existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em $G \Leftrightarrow$ para todo bloco B de G, todos os caminhos mais longos que têm pelo menos uma aresta em B têm um vértice em comum.*

5. O problema dos três caminhos

Problema 4: *Existe um vértice comum a quaisquer três caminhos mais longos em G?*

Em 2009, Axenovich [Axe09] provou que isso é verdade para grafos exoplanares.

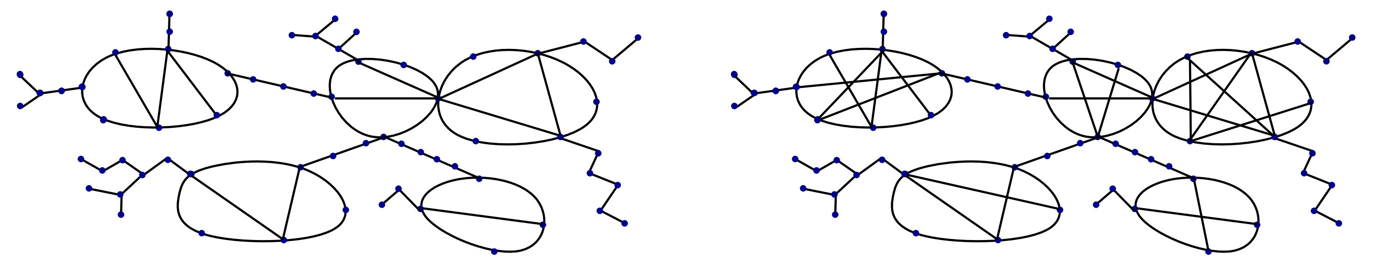
Teorema 5: *Se G é um grafo exoplanar conexo, então existe um vértice comum a quaisquer três caminhos mais longos em G.*

6. Dois novos resultados

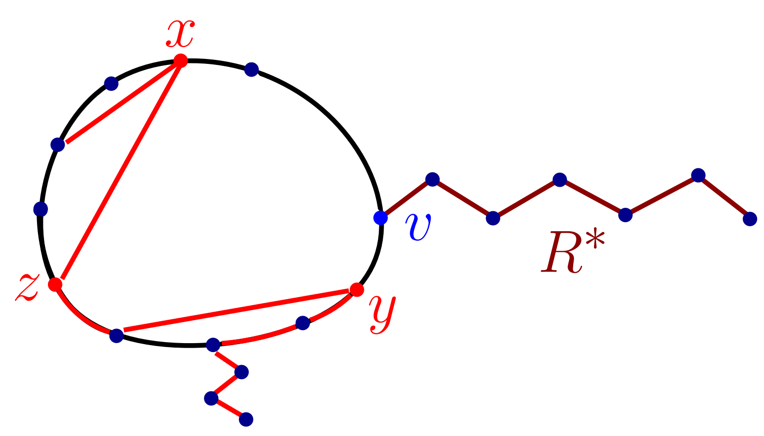
Apresentamos dois novos resultados que generalizam, de modos distintos, o Teorema 5.

Teorema 6: *Se G é um grafo exoplanar conexo, então existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em G.*

Teorema 7: *Se G é um grafo bloco-Hamiltoniano conexo, então existe um vértice comum a quaisquer três caminhos mais longos em G.*



7. Idéia da prova do Teorema 6



Asserção 8: *Todos os caminhos mais longos passam pelo vértice v.*

Passos da prova:

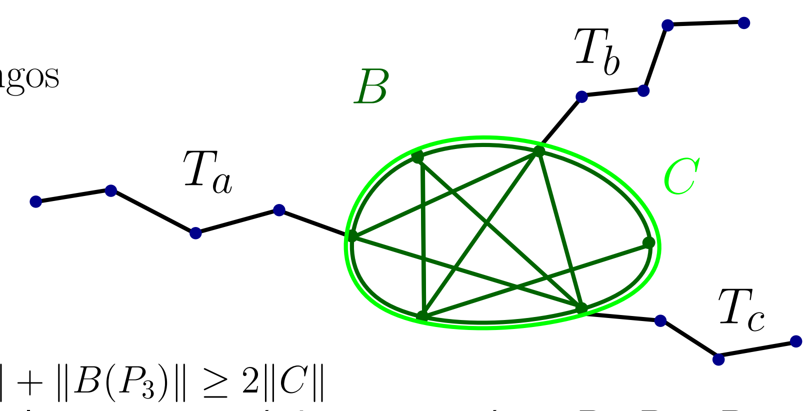
- Supor que exista um caminho mais longo P que não passa por v.
- Construir um caminho mais longo que P (gerando uma contradição).
- Concluir que todo caminho mais longo deve passar por v.
- Aplicar a Proposição 3 para generalizar para um grafo exoplanar com mais blocos.

8. Idéia da prova do Teorema 7

P_1, P_2, P_3 três caminhos mais longos

$B(P) = B \cap P$

$P_i = T_i^{-1} \cdot B(P_i) \cdot T_i'$

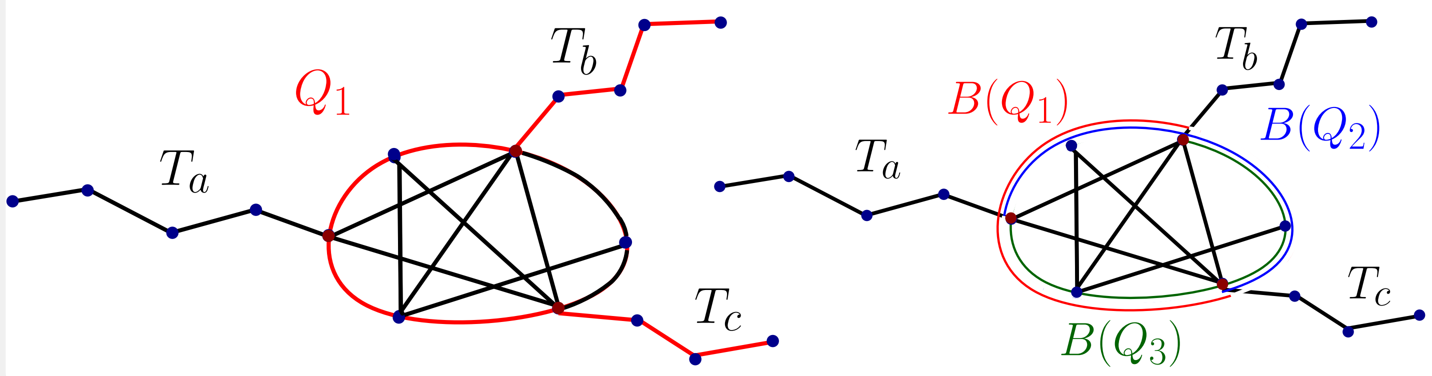


Objetivo:

- Mostrar que $\|B(P_1)\| + \|B(P_2)\| + \|B(P_3)\| \geq 2\|C\|$
- Princípio da Casa dos Pombos: pelo menos um vértice aparecerá em P_1, P_2 e P_3.

Passos da prova:

- Encontrar cota inferior para $\|B(P_i)\|$
- Construir caminhos $Q_i = R_i^{-1} \cdot B(Q_i) \cdot R_i'$ tal que: $\|R_i\| + \|R_i'\| \geq \|T_i\| + \|T_i'\|$ **(1)**
  - Observe que: $\|Q_i\| \leq \|P_i\|$ **(2)**
  - **(1)** + **(2)** $\Rightarrow \|B(P_i)\| \geq \|B(Q_i)\|$
- Mostrar que $\|B(Q_1)\| + \|B(Q_2)\| + \|B(Q_3)\| \geq 2\|C\|$



9. Conclusões

Além de adquirir conhecimentos em teoria de grafos, algoritmos, redutibilidade e complexidade, aprendemos diversas abordagens para resolução de problemas. Foi especialmente interessante experimentar os desafios de trabalhar com um problema aberto. Pretendemos continuar nossos estudos, procurando ir além da fronteira do que se conhece hoje sobre esse assunto.

Referências

M. Axenovich.
When do three longest paths have a common vertex?
Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 1:115–120, 2009.

P.N. Balister, E. Györi, J. Lehel, and R.H. Schelp.
Longest paths in circular arc graphs.
Combin. Probab. Comput., 13(3):311–317, 2004.

T. Gallai.
Problem 4.
In *Theory of Graphs*, page 362, Proccedings of the coloquiem held at Tihany Hungary (ed: Erdös, P. and Katona, G.), 1968. Academic Press, New York.

K. Ioannidou, G.B. Mertzios, and S.D. Nikolopoulos.
The longest path problem has a polynomial solution on interval graphs.
Algorithmica, 2010.

S. Klavžar and M. Petkovšek.
Graphs with non empty intersection of longest paths.
Ars. Combin., 29:13–52, 1990.

R. Uehara and Y. Uno.
On computing longest paths in small graph classes.
Internat. J. Found. Comput. Sci., 18(5):911–930, 2007.

susanna@ime.usp.br