

# Proposta do TCC

Germano Hüning Neuenfeld  
Orientador: Marcel Kenji de Carli Silva

20 de Abril de 2020

## 1 Apresentação e Motivação

*Introduz o tema ou o problema a ser tratado (o que é e por que é interessante/relevante tratá-lo)*

O tema do trabalho se divide essencialmente em duas grandes partes.

A primeira é o estudo de um algoritmo randomizado que é uma  $(O(\log(n)/\log\log(n))$ -aproximação para o problema do caixeiro-viajante assimétrico (ATSP) com a função de custo respeitando a desigualdade triangular.

Mais precisamente, o ATSP se descreve como:

Dado um digrafo completo  $D = (V, A)$  com uma função não negativa de custos  $c \in \mathbb{R}_+^A$ , encontre um circuito hamiltoniano de custo mínimo.

Logo, o problema tratado é o ATSP com a restrição de que a função de custo  $c$  deve satisfazer a desigualdade triangular, ou seja,  $c_{uv} + c_{vw} \geq c_{uw}$  para cada tripla de vértices distintos  $u, v, w \in V$ .

Os motivos para estudar tal algoritmo são vários. Primeiro, o TSP, do qual o ATSP é uma variação, é um dos problemas mais estudados de otimização e com muitas aplicações. Segundo, o algoritmo que abordamos representou, em 2012, a quebra de uma barreira de 30 anos do melhor resultado até então. Terceiro, é um algoritmo muito elegante baseado no algoritmo de Christofides — um algoritmo de aproximação consagrado que também iremos apresentar. Por fim, o artigo introduz ideias novas, como o conceito de árvores finas que vamos apresentar, que se revelaram úteis inclusive em outros trabalhos e, portanto, são um acréscimo ao aluno.

O segundo grande tema é apresentar uma série de conceitos e ferramentas de teoria da computação necessárias para entender o algoritmo. Dentre alguns deles temos:

- Problema do fluxo máximo e o algoritmo de Edmonds-Karp que o resolve em tempo polinomial.
- Método dos Elipsóides tanto para provar a equivalência entre problema de separação e problema de otimização, quanto para construir algoritmos eficientes.

- Polítopo das árvores geradoras em cujas propriedades o algoritmo se baseia.
- Uma série de resultados envolvendo a parte aleatorizada do algoritmo como, por exemplo: limitantes de Chernoff para variáveis aleatórias negativamente correlacionadas; teorema da Matriz-Árvore de Kirchhoff.

Esses assuntos por si só são interessantes, são fundamentais em suas áreas, e tratam de áreas de estudos diferentes. Assim, o aluno terá a oportunidade de aprender conceitos que poderão ser úteis em seus outros estudos ao mesmo tempo em que entra em contato com várias áreas diferentes.

## 2 Objetivos do trabalho

*Objetivos do trabalho (onde quer se chegar)*

Primeiro, se espera que ao final o aluno tenha aprendido conceitos fundamentais de áreas diversas (como citados na seção anterior) e também tenha visto um exemplo de como eles aparecem em conjunto dentro de um algoritmo complexo, recente e que resolve um dos problemas mais famosos na teoria da computação.

Segundo, o texto será escrito em inglês e possui natureza matemática. Portanto, ao final se espera que o aluno tenha adquirido tanto um maior domínio no uso da língua inglesa como também uma maior proficiência para formalizar rigorosamente definições e resultados matemáticos.

## 3 Passos Importantes

*Os passos importantes para se atingir os objetivos*

O trabalho já foi dividido em Introdução e outros 7 capítulos permitindo dar uma dimensão dos passos e atividades envolvidas para a sua completude. Assim temos:

### 1. Introdução

Fará uma apresentação do tema da monografia e a motivação para o estudo dele. Será o último capítulo a ser feito, quando o aluno já possuir a visão geral da monografia bem sedimentada.

### 2. Preliminares

Esse capítulo abrange conceitos envolvendo áreas como Teoria dos Grafos, Álgebra Linear, Programação Linear e outros. Esses assuntos não são o foco de estudo da monografia, mas seus conceitos serão manipulados durante ela e, por isso, requerem uma menção precisa. Assim, esse capítulo será construído sob demanda em paralelo com os outros da monografia.

### 3. Algoritmo de Christofides

Como vimos, o algoritmo principal da monografia é inspirado no algoritmo de Christofides que é o tema dessa parte. Para entendê-lo vamos, por

exemplo: estudar o algoritmo de Kruskal que resolve o problema de encontrar uma árvore geradora de custo mínimo em um grafo, primeiro passo do algoritmo; estudar a técnica de “atalhar” uma trilha euleriana para se produzir um circuito hamiltoniano de custo não maior, ideia presente no final do algoritmo. Por fim, aqui pretendemos introduzir uma descrição explícita do politopo das árvores geradoras.

#### 4. Descrição geral do Algoritmo, Limitante de Held-Karp e Árvores Finas

Vamos dar uma descrição geral do algoritmo fazendo um paralelo dele com o Algoritmo de Christofides. Vamos introduzir a relaxação de Held-Karp para o ATSP cuja solução ótima tem custo não pior que a resposta ótima do ATSP. Além disso, veremos a definição das importantes árvores finas que serão o tipo de árvore buscada na parte aleatorizada do algoritmo.

#### 5. Fluxo máximo, circulações, redução do ATSP para encontrar uma árvore fina

Desenvolveremos uma série de resultados envolvendo fluxos que ajudarão no algoritmo. Primeiro, desenvolvemos um algoritmo polinomial para o problema do fluxo máximo. Fazemos isso primeiro provando o teorema do fluxo-máximo-corte-mínimo e então apresentando o algoritmo devido a Edmonds e Karp. Resolver o problema do fluxo máximo em tempo polinomial será importante para conseguir resolver também em tempo polinomial a relaxação de Held-Karp.

Depois, definimos circulações e provamos o teorema de Hoffmann que nos fornece uma condição necessária e suficiente para a existência de uma circulação. Finalmente, provamos o teorema que reduz resolver o ATSP a encontrar uma árvore  $(\alpha, s)$ -fina (para constantes  $\alpha$  e  $s$  desejadas). Esse problema faz uso de circulações e do teorema de Hoffmann.

#### 6. Algoritmos Aleatórios

Esse capítulo compreende o cerne da monografia. Primeiro ele apresenta a base da teoria de probabilidade a ser usada: definição formal de espaço de probabilidade e conceitos relacionados como variáveis aleatórias; limitantes de Chernoff para quando as variáveis aleatórias são negativamente correlacionadas.

Segundo, mostra o resultado presente no artigo *Dependent Randomized Rounding*, por C. Chekuri, J. Vondrák, e R. Zenklusen que apresenta uma forma de amostrar uma árvore aleatória com as propriedades desejadas — marginais preservadas e variáveis aleatórias envolvidas negativamente relacionadas.

Finalmente, a partir de uma sequência de amostragens usando o método anterior se mostra que uma árvore  $(\alpha, s)$ -fina (para constantes  $\alpha$  e  $s$  desejadas) é obtida com alta probabilidade (especificada em função do número de amostragens) e então usando a redução apresentada no passo anterior está resolvido o problema.

## 7. Método dos Elipsoides e o limitante de Held-Karp

Estudaremos o que são elipsoides, o que é o método dos elipsoides e o teorema da equivalência entre problemas de separação e problemas de otimização utilizando o método dos elipsoides. Por fim, veremos como usando o método dos elipsoides, esse teorema da equivalência e o algoritmo para encontrar o fluxo máximo (desenvolvido no capítulo de fluxos) conseguimos em tempo polinomial encontrar uma solução ótima para a relaxação de Held-Karp.

## 4 Cronograma

*Cronograma Aproximado (levem em conta quais são as atividades importantes em cada passo e qual o tempo estimado para a execução das mesmas)*

### 1. Primeiro quadrimestre de 2020:

Leitura parcial dos diferentes assuntos da monografia e do artigo assim como começar a escrita.

### 2. Segundo quadrimestre de 2020:

Em Maio, terminar os capítulos dos passos 5 e adiantar o capítulo 6 restando apenas a parte do método do artigo de Chekuri e outros. Em Junho, terminar os capítulos dos passos 3 e 4. Em Julho e Agosto, concluir o capítulo do passo 6 e fazer o capítulo do passo 7.

### 3. Terceiro quadrimestre de 2020

É esperado que ao final de Agosto a escrita preliminar com todos os resultados já tenha sido finalizada. Assim, os últimos dois meses serão dedicados a revisões que sejam necessárias e adição de textos complementares que auxiliem na compreensão do texto base pelo leitor.

Progresso Atual: No momento, o aluno já fez uma leitura parcial dos assuntos. Além disso, o capítulo 5 se encontra mais próximo de finalização, enquanto os capítulos 3 e 4 já possuem um desenvolvimento parcial. Por fim, o capítulo 6 já foi iniciado.